数理解析研究所講究録
940 巻 1996 年 62-76

減衰項のある非線形双曲型分布系の最適制御

神戸大学自然科学研究科　河準洪 (Junhong Ha)
神戸大学工学部　中桐信一 (Shin-ichi Nakagiri)

1 序論

本論文の目的は, 減衰項を持つ非線形双曲型分布系により記述される制御系に対して最適制御問題を考えることである. 即ち, 減衰項のある制御された非線形双曲型分布系

$$\begin{cases} \ddot{y} + A_2(t)\dot{y} + A_1(t)y = f(t,y) + Bv \quad \text{in} \quad (0,T), \\ y(0) = y_0 \in V, \\ \dot{y}(0) = y_1 \in H \end{cases}$$

を考え, この系に対する最適制御問題を望ましい形で解きたい. 上式において, $A_1(t)$ と $A_2(t)$ は微分作用素, fは非線形項, Bは制御器, vは制御である. 制御系に対する二次コスト関数

$$J(v) = \|Cy(v) - z_d\|_M^2 + (Rv, v)_{\mathcal{U}}, \quad v \in \mathcal{U}$$

を考える. この時, $\mathcal{U}$を制御変数の作る空間としてコストの最小性, 即ち

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

を満たす最適制御 u が許容集合 $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$ の内に存在するかという問題およびその最適制御 u の特徴づけ（最適性条件の記述）の問題を考察する. $A_2(t) \equiv 0$ かつ fが yについて線形の場合は Lions[6] によりこの最適制御問題の広汎な研究がなされている. しかしながら $A_2(t) \neq 0$ なる場合は, 充分な研究がなされているとは言い難い. 我々は, ここで $A_2(t)$ に対応する新しいヒルベルト空間を導入し, 非線形外力 fをもつ上のような制御系に対し最適制御理論を展開したい. 後に5節で述べる様に我々は多くの新しい最適性条件を色々なタイプの非線形系に対して得た. 非線形および変分方程式に関する理論については、[1], [2], [4], [5] を参照されたい。

2 非線形双曲型分布系

2.1 方程式に関する仮定

まず減衰項をもつ非線形双曲型分布系の説明を与えよう.

2.1.1 導入される空間及び記号の説明

方程式を定義するために必要な空間と双対性について個条書きで説明する.

- H : Pivot ヒルベルト空間, i.e, $H \equiv H'$
- V : 主要な微分作用素を定義するための可分ヒルベルト空間
- V_2 : ダンピング項を定義するための可分ヒルベルト空間
- $\mathcal{U}$: 制御変数からなるヒルベルト空間
- M : 観測データを表すためのヒルベルト空間
- X'は空間 Xの双対空間
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X}$は双対性 X, X'に於けるスカラー積
- $(\cdot, \cdot)_X$は空間 Xに於けるスカラー積
- Λ_Xは Xから X'へのに於ける標準同形写像

次に Gelfand triple としての空間設定を与える. 即ち,

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V' \Leftrightarrow I_d : V \to H \text{なる単射は連続}, V \text{は} H \text{で dense}$$

かつ

$$V_2 \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V_2' \Leftrightarrow I_d : V_2 \to H \text{なる単射は連続}, V_2 \text{は} H \text{で dense}$$

と仮定する.

2.1.2 微分作用素 $A_1(t), A_2(t)$ の説明

(仮定 1)　$A_1(t) \in \mathcal{L}(V, V')$ について

$\forall t \in [0,T]$ に対し $a_1(t, \phi, \varphi)$ は $V \times V$上で定義され, かつ次の 4 つの条件を満たす bilinear form であるとする. 即ち, $\forall t \in [0,T], \forall \phi, \varphi \in V$に対して

(i) $a_1(t;\phi,\varphi) = a_1(t;\varphi,\phi)$,

(ii) $\exists c_{11} > 0;\quad |a_1(t;\phi,\varphi)| \le c_{11}\|\phi\|_V\|\varphi\|_V$,

(iii) $\exists \alpha_1 > 0, \lambda_1 \in \mathbf{R}$;
$a_1(t;\phi,\phi) + \lambda_1|\phi|_H^2 \ge \alpha_1\|\phi\|_V^2$,

(iv) 関数 $t \to a_1(t;\phi,\varphi)$ は $[0,T]$ 上で 微分可能であり,
$\exists c_{12} > 0;\quad |\dot{a}_1(t;\phi,\varphi)| \le c_{12}\|\phi\|_V\|\varphi\|_V$.

条件 (ii) より

$$a_1(t;\phi,\varphi) = \langle A_1(t)\phi,\varphi\rangle_{V',V},\quad \forall\phi,\varphi \in V$$

が成り立つ様な作用素 $A_1(t) \in \mathcal{L}(V,V')$ が決まり, また条件 (iv) より

$$\dot{a}_1(t;\phi,\varphi) = \langle \dot{A}_1(t)\phi,\varphi\rangle_{V',V},\quad \forall\phi,\varphi \in V$$

が成り立つ様な作用素 $\dot{A}_1(t) \in \mathcal{L}(V,V')$ が決まる.

(仮定 2)　$A_2(t) \in \mathcal{L}(V_2,V_2')$ について

$\forall t \in [0,T]$ に対し $a_2(t,\phi,\varphi)$ は $V_2 \times V_2$上で定義され, かつ次の 4 つの条件を満たす bilinear form であるとする. 即ち, $\forall t \in [0,T], \forall\phi,\varphi \in V_2$に対し

(i) $a_2(t;\phi,\varphi) = a_2(t;\varphi,\phi)$,

(ii) $\exists c_{21} > 0;\quad |a_2(t;\phi,\varphi)| \le c_{21}\|\phi\|_{V_2}\|\varphi\|_{V_2}$,

(iii) $\exists \alpha_2 > 0, \lambda_2 \in \mathbf{R}$;
$a_2(t;\phi,\phi) + \lambda_2|\phi|_H^2 \ge \alpha_2\|\phi\|_{V_2}^2$,

(iv) 関数 $t \to a_2(t;\phi,\varphi)$ は $[0,T]$ 上で 微分可能であり,
$\exists c_{22} > 0;\quad |\dot{a}_2(t;\phi,\varphi)| \le c_{22}\|\phi\|_{V_2}\|\varphi\|_{V_2}$.

条件 (ii) より

$$a_2(t;\phi,\varphi) = \langle A_2(t)\phi,\varphi\rangle_{V_2',V_2},\quad \forall\phi,\varphi \in V_2$$

が成り立つ様な作用素 $A_2(t) \in \mathcal{L}(V_2,V_2')$ が決まり, 同様に条件 (iv) より

$$\dot{a}_2(t;\phi,\varphi) = \langle \dot{A}_2(t)\phi,\varphi\rangle_{V_2',V_2},\quad \forall\phi,\varphi \in V_2$$

が成り立つ様な作用素 $\dot{A}_2(t) \in \mathcal{L}(V_2,V_2')$ が決まる.

2.1.3 Gelfand fivefold の仮定

基本的な仮定として我々は, Vと V_2との間に, $V \hookrightarrow V_2$ (連続的埋め込み) なる条件をおく. この時, 先の二つ Gelfand triple から

$$
\begin{aligned}
&V \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V_2' \hookrightarrow V' \\
&\Leftrightarrow \forall x \in V \text{に対し,} \\
&\langle x, y\rangle_{V,V'} = \langle x, y\rangle_{V_2,V_2'} \quad \text{if} \quad y \in V_2' \\
&\langle x, y\rangle_{V_2,V_2'} = (x, y)_H \quad \text{if} \quad y \in H
\end{aligned}
$$

が成り立つ. この様な 5 つの埋め込み対を Gelfand fivefold と呼ぶ.

注意：ここでは, 減衰項を扱うための独立な空間 V_2を設けているので, 減衰項を支配する微分作用素を自由に選べることができるという利点がある. Lions [5], [6] では, 線形系しか考えておらず, 更に $A_2(t) \equiv 0$ であるか, 又は, 埋め込みを考えずに $y, \dot{y}, \ddot{y}$に対応する三つのヒルベルト空間 V_1, V_2, V_3を導入した後, $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3, W = V_2 \cap V_3$ の様な空間を考え, その上で指数関数変換により変分不等式を用いて一般の線形系の解の存在を示している (変換するために a_2の 2 回微分可能性が必要になる).

2.2 減衰項のある非線形系

我々は外力が非線形項となる次の形の非線形系を考える.

$$
(EQ)\begin{cases}
\ddot{y} + A_2(t)\dot{y} + A_1(t)y = f(t, y) \quad \text{in} \quad (0, T), \\
y(0) = y_0 \in V, \\
\dot{y}(0) = y_1 \in H.
\end{cases}
$$

ここで, 非線形関数 $f : [0, T] \times V \to V_2'$ は次の条件

(F1) $\forall x \in V, \quad f(\cdot, x) : [0, T] \to V_2'$ は可測関数,

(F2) $x_n \to x$ weakly star in $L^2(0, T; V)$
$\Longrightarrow f(t, x_n) \to f(t, x)$ weakly in $L^2(0, T; V_2')$,

(F3) $\exists \beta \in L^2(0, T; \mathbf{R}^+)$;
$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{V_2'} \le \beta(t)\|x - y\|_V, \quad \forall x, y \in V,$

(F4) $\exists \gamma \in L^2(0, T; \mathbf{R}^+)$;
$\|f(t, 0)\|_{V_2'} \le \gamma(t)$

を満足していると仮定する. この時, 次の定理が得られる.

THEOREM 1 非線形系 (EQ) の解 yが次の空間 $W(0,T)$ 内に一意に存在する. ここで,

$$W(0,T) = \{y \in L^2(0,T;V) : \dot{y} \in L^2(0,T;V_2), \ddot{y} \in L^2(0,T;V')\}$$

である. かつ解の正則性の結果

$$y \in C([0,T];V), \quad \dot{y} \in C([0,T];H)$$

が成り立つ.

存在証明は Galerkin finite approximation を利用して実行する. 一意性と正則性は次のエネルギー評価 (Lemma 1) から導く. 詳しい証明は Ha[3] にある.

LEMMA 1 (エネルギー等式) . (EQ) の解 yはすべての t に対して次のエネルギー等式を満たす.

$$\begin{aligned} & a_1(t;y(t),y(t)) + |\dot{y}(t)|_H^2 + 2\int_0^t a_2(\sigma;\dot{y}(\sigma),\dot{y}(\sigma))d\sigma \\ = \ & a_1(0;y_0,y_0) + |y_1|_H^2 + \int_0^t \dot{a}_1(\sigma;y(\sigma),y(\sigma))d\sigma \\ & +2\int_0^t \langle f(\sigma,y(\sigma)),\dot{y}(\sigma)\rangle_{V_2',V_2} d\sigma \end{aligned}$$

3 減衰項をもつ非線形双曲型分布系の最適制御問題

3.1 最適制御の存在

$\mathcal{U}$を制御変数 vの作るヒルベルト空間とする. 次の減衰項をもつ非線形双曲型制御系を考える.

$$(CEQ)\begin{cases} \ddot{y} + A_2(t)\dot{y} + A_1(t)y = f(t,y) + Bv, \quad v \in \mathcal{U}, \quad t \in (0,T), \\ y(0) = y_0 \in V, \\ \dot{y}(0) = y_1 \in H. \end{cases}$$

ここで, $f(t,y) : [0,T] \times V \to V_2'$ は非線形外力項, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, L^2(0,T;V_2'))$ は制御器を表わす. この時, 制御系 (CEQ) の解は空間 $W(0,T)$ の内に一意的に存在することがわかる. 従って, 制御 vから解 $y(v)$ への写像

$$v \to y(v) : \mathcal{U} \to W(0,T)$$

を考えることができる．もし外力項が線形の場合, 即ち, $f(t,y) = f(t)$ の時は, 写像 $v \to y(v)$ は affine 写像であるので, Gateaux 微分可能である．しかしながら, 外項が非線形の場合は, この写像が Gateaux 微分可能であるかどうかは一般にはわからない．そしてそのための条件を見い出すことは重要な問題である．$\mathcal{U}$上の正値対称作用素 R に対し, 最適制御問題を考えるため次の二次形式により定義されるコスト関数

$$J(v) = \|Cy(v) - z_d\|_M^2 + (Rv, v)_{\mathcal{U}}, \ \forall v \in \mathcal{U}$$

を導入する．Cは $W(0,T)$ 上の観測作用素であり, $z_d \in M$は目標値, Mは観測データからなるヒルベルト空間とする．(CEQ) に対する最適制御問題は次のように定式化される．

最適制御問題：コスト $J(v)$ の最小性, 即ち

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) = J(u), \tag{1}$$

を満たす最適制御 u は存在するか？　また存在するとして u を特徴づける条件を見い出せ．ここで$\mathcal{U}_{ad}(\subset \mathcal{U})$ は閉凸許容集合とする．

最適制御 u の存在については次の定理が得られる．

THEOREM 2 少なくとも一つの最適制御 u が存在する．

証明はエネルギー等式からすぐわかる．

3.2 写像 $v \to y(v)$ の Gateaux 微分可能性

最適制御 u は不等式

$$\frac{J(u+\theta(v-u)) - J(u)}{\theta} \geq 0, \quad \forall \theta \in (0,1), \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

を満たすので, もし $v \to J(v)$ が u で Gateaux 微分可能ならば, 最適制御条件は変分不等式

$$DJ(u)(v-u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{2}$$

により見い出す事ができる．実際, 写像 $v \to J(v)$ の u での Gateaux 微分可能性は, 写像 $v \to y(v)$ の u での Gateaux 微分可能性により決定される．これについては次の補題が得られる．

PROPOSITION 1 fについて次の仮定 (F) をおく．(F) $\forall t \in [0,T]$ に対し, $f(t,y)$ は $y = y(u)$ で Fréchet 微分可能でありかつ

$$\sup_{t \in [0,T]} \|df(t, y(u))\|_{\mathcal{L}(V, V_2')} < +\infty.$$

ここで $df(t,y)$ は y での $f(t,y)$ の Fréchet 微分を表す．この時，写像 $v \to y(v)$ は，$v = u$ で Gateaux 微分可能でありかつ

$$\ddot{z} + A_2(t)\dot{z} + [A_1(t) - df(t,y(u))]z = B(v-u), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

を満たす $z \in W(0,T)$ が一意に決まる．

この Proposition 1を示すためには次の Lemma が必要である．

LEMMA 2 $v \in \mathcal{U}_{ad}$を固定する．この時

$$\lim_{\lambda\to 0} y(u+\lambda v) = y(u) \quad \text{in} \quad C([0,T];V)$$

が成り立つ．

（Proposition 1の証明）$z_\lambda = \lambda^{-1}y_\lambda, \quad y_\lambda = y(u+\lambda v) - y(u)$ とおく．この時，次の等式

$$\begin{aligned}
& a_1(t; z_\lambda(t), z_\lambda(t)) + |\dot{z}_\lambda(t)|_H^2 + 2\int_0^t a_2(\sigma; \dot{z}_\lambda(\sigma), \dot{z}_\lambda(\sigma))d\sigma \\
= & \int_0^t \dot{a}_1(\sigma; z_\lambda(\sigma), z_\lambda(\sigma))d\sigma + 2\int_0^t \langle (Bv)(\sigma), \dot{z}_\lambda(\sigma)\rangle_{V_2', V_2} d\sigma \\
& +2\int_0^t \langle \lambda^{-1}[f(\sigma, y(u+\lambda v;\sigma)) - f(\sigma, y(u;\sigma))], \dot{z}_\lambda(\sigma)\rangle_{V_2', V_2} d\sigma
\end{aligned}$$

がなりたつ．仮定 (F) を使うと，これから

$$\begin{aligned}
& \|z_\lambda(t)\|_V^2 \leq \|z_\lambda(t)\|_V^2 + |\dot{z}_\lambda(t)|_H^2 + \int_0^2 \|\dot{z}_\lambda(\sigma)\|_{V_2}^2 d\sigma \\
\leq \; & K\int_0^t \beta(\sigma)^2 \|z_\lambda(\sigma)\|_V^2 d\sigma + K\|Bv\|_{L^2(0,T;V_2)}^2
\end{aligned}$$

が導かれる (Kは適当な正数)．ここで，Gronwall の不等式を用いると

$$\begin{aligned}
& \|z_\lambda(t)\|_V^2 + |\dot{z}_\lambda(t)|_H^2 + \int_0^2 \|\dot{z}_\lambda(\sigma)\|_{V_2}^2 d\sigma \\
\leq \; & K'\|Bv\|_{L^2(0,T;V_2)}^2
\end{aligned}$$

となり (K'は適当な正数，従ってこの不等式より次のことがわかる．

$$\begin{aligned}
& z_\lambda \to z \quad \text{weakly star in} \quad L^\infty(0,T;V) \quad \text{as} \quad \lambda \to 0, \\
& \dot{z}_\lambda \to \dot{z} \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T;V_2) \quad \text{as} \quad \lambda \to 0, \\
& \dot{z}_\lambda \to \dot{z} \quad \text{weakly star in} \quad L^\infty(0,T;H) \quad \text{as} \quad \lambda \to 0.
\end{aligned}$$

$f(t,y)$ は $y=y(u)$ で Fréchet 微分可能であるから Lemma 2 より

$$\begin{aligned}&\frac{f(t,y(u+\lambda v))-f(t,y(u))}{\lambda}\\ =\ &\left(\frac{f(t,y(u+\lambda v))-f(t,y(u))}{y(u+\lambda v)-y(u)}\right)\left(\frac{y(u+\lambda v)-y(u)}{\lambda}\right)\\ &\longrightarrow df(t,y(u))z \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T;V_2') \quad \text{as} \quad \lambda\to 0\end{aligned}$$

が示される. 従って, zは次の方程式を満たす.

$$\ddot{z}+[A_1(t)-df(t,y(u))]z+A_2(t)\dot{z}=B(v-u), \quad \forall v\in\mathcal{U}_{ad}.$$

この方程式の解の存在は, 仮定 (F) により確かめられる. また解の一意性は $f(t,z)=df(t,y(u))z+B(v-u)$ とおくことによりすぐわかる. 以下では, 記号の整合性を考えて $z=Dy(u)(v-u)$ と書こう. ここで, $df(t,y(u))$ の共役作用素 $df^*(t,y(u))\in\mathcal{L}(V,V_2')$ の定義を次のように与えておこう.

$$\langle df(t,y(u))\phi,\psi\rangle_{V_2',V_2}=\langle\phi,df^*(t,y(u))\psi\rangle_{V_2,V_2'}, \quad \forall\phi,\psi\in V_2.$$

3.3 観測のタイプ分けと最適性の条件

ここでは, 観測作用素 Cを次の様な四つのタイプに分けて最適制御問題を扱う.

(i) $C_1\in\mathcal{L}(L^2(0,T;V),M)$ とし $z(v)=C_1y(v)$ を観測,

(ii) $C_2\in\mathcal{L}(L^2(0,T;V_2),M)$ とし $z(v)=C_2\dot{y}(v)$ を観測,

(iii) $C_3\in\mathcal{L}(V,M)$ とし $z(v)=C_3y(T;v)$ を観測,

(iv) $C_4\in\mathcal{L}(H,M)$ とし $z(v)=C_4\dot{y}(T;v)$ を観測.

観測 (i) と (ii) は, (CEQ) の解 yが空間 $W(0,T)$ に属しているので, 自然な観測である. 観測 (iii) と (iv) は Theorem 1で示された正則性により意味を持つ.

3.3.1 $C_1\in\mathcal{L}(L^2(0,T;V),M)$ の場合

この場合のコスト関数は,

$$J(v)=\|C_1y(v)-z_d\|_M^2+(Rv,v)_{\mathcal{U}}, \quad \forall v\in\mathcal{U}_{ad}$$

で与えられる. 従って条件 (2) より最適性の条件は

$$\begin{aligned}&\int_0^T\langle C_1^*\Lambda_M(C_1y(u;t)-z_d(t)),Dy(u)(v-u)\rangle_{V',V}dt\\ &+(Ru,v-u)_{\mathcal{U}}\geq 0, \quad \forall v\in\mathcal{U}_{ad}\end{aligned}$$

とかける．作用素 C_1 について次のより強い仮定をおく．これは随伴系の解の一意的な存在のために必要な条件である．

$$\text{仮定} \qquad C_1 \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V_2),M).$$

THEOREM 3 C_1 は上の仮定を満たしているとする．この時，最適制御 u は次の制御系，随伴系および変分不等式を満たす．

制御系：

$$\begin{cases} \ddot{y}(u) + A_2(t)\dot{y}(u) + A_1(t)y(u) = f(t,y(u)) + Bu \quad \text{in} \quad (0,T), \\ y(0) = y_0 \in V, \quad \dot{y}(0) = y_1 \in H. \end{cases}$$

随伴系：

$$\begin{cases} \ddot{p}(u) - A_2(t)\dot{p}(u) + (A_1(t) - \dot{A}_2(t))p(u) \\ \qquad = df(t,y(u))^* p(u) + C^*\Lambda_M(Cy(u) - z_d) \quad \text{in} \quad (0,T), \\ p(u;T) = 0, \quad \dot{p}(u;T) = 0. \end{cases}$$

最適制御条件：

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Ru, v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

3.3.2 $C_2 \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V_2),M)$ の場合

コスト関数は，この場合

$$J(v) = \|C_2\dot{y}(v) - z_d\|_M^2 + (Rv,v)_U, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

で与えられる．よって条件 (2) より最適性の条件は

$$\int_0^T \langle C_2^*\Lambda_M(C_2\dot{y}(u;t) - z_d(t)), D\dot{y}(u)(v-u)\rangle_{V_2',V_2} dt$$
$$+(Ru, v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

である．A_1 について次の仮定をおく．

$$\text{仮定} \qquad \dot{A}_1 \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}(V,V_2')).$$

この仮定も随伴系の解の一意的な存在のための必要である．

THEOREM 4 A_1 は上の仮定を満たすとする．この時，最適制御 u は次の制御系，随伴系および変分不等式を満たす．制御系：

$$\begin{cases} \ddot{y}(u) + A_2(t)\dot{y}(u) + A_1(t)y(u) = f(t,y) + Bu \quad \text{in} \quad (0,T), \\ y(u;0) = y_0 \in V, \quad \dot{y}(u;0) = y_1 \in H. \end{cases}$$

(1) 随伴系：($df(t,y(u))$ が t について微分可能なる場合)

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{p}(u)-A_2(t)\dot{p}(u)+A_1(t)p(u)+\displaystyle\int_t^T \dot{A}_1(\sigma)p(u)d\sigma \\ =df^*(t,y(u))p(u)+\displaystyle\int_t^T \frac{d}{dt}df^*(\sigma,y(u))p(u)d\sigma \\ +C_2^*\Lambda_M(C_2\dot{y}(u)-z_d) \ \text{ in } \ (0,T), \\ p(u;T)=0, \ \ \dot{p}(u;T)=0.\end{array}\right\}$$

(2) 随伴系：($df(t,y(u)) \in \mathcal{L}(H,V_2')$ の場合)

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{p}(u)-A_2(t)\dot{p}(u)+A_1(t)p(u)+\displaystyle\int_t^T \dot{A}_1(\sigma)p(u)d\sigma+\int_t^T df^*(\sigma,y(u))\dot{p}(u)d\sigma \\ =C_2^*\Lambda_M(C_2\dot{y}(u)-z_d) \ \text{ in } \ (0,T), \\ p(u;T)=0, \ \ \dot{p}(u;T)=0.\end{array}\right\}$$

最適制御条件：

$$(-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*\dot{p}(u)+Ru,v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

3.3.3 $C_3 \in \mathcal{L}(V,M)$ の場合

コスト関数は,

$$J(v)=\|C_3y(T;v)-z_d\|_M^2+(Rv,v)_U, \ \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

で与えられる．条件 (2) より最適性の条件はすべての $v \in \mathcal{U}_{ad}$に対し

$$\langle C_3^*\Lambda_M(C_3y(u;T)-y(v;T)),Dy(u;T)(v-u)\rangle_{V',V}+(Ru,v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0$$

である．作用素 C_3については, 更に強く仮定 $C_3 \in \mathcal{L}(H,M)$ をおく．この条件も随伴系の解の一意的な存在のために必要である．

THEOREM 5 C_3は $C_3 \in \mathcal{L}(H,M)$ を満たしているとする．この時, 最適制御 u は次の制御系, 随伴制御系および変分不等式を満たす．制御系：

$$\left\{\begin{array}{l}\ddot{y}+A_2(t)\dot{y}+A_1(t)y=Bu+f(t,y) \ \text{ in } \ (0,T), \\ y(0)=y_0 \in V, \ \ \dot{y}(0)=y_1 \in H,\end{array}\right.$$

随伴系：

$$\left\{\begin{array}{l}\ddot{p}(u)-A_2(t)\dot{p}(u)+(A_1(t)-\dot{A}_2(t))p(u)-df(t,y(u))^*p(u)=0 \ \text{ in } \ (0,T), \\ p(u;T)=0, \\ \dot{p}(u;T)=C_3^*\Lambda_M(C_3y(T;u)-z_d),\end{array}\right.$$

最適制御条件：

$$(-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Ru,v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

3.3.4 $C_4 \in \mathcal{L}(H, M)$ の場合

コスト関数は,

$$J(v) = \|C_4\dot{y}(T;v) - z_d\|_M^2 + (Rv, v)_U, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

となる. この場合は, 形式的な計算により, 次のような随伴系が考えられる.

$$\begin{cases} \ddot{p}(u) - A_2(t)\dot{p}(u) + (A_1(t) - \dot{A}_2(t))p(u) = 0 \quad \text{in} \quad (0, T), \\ p(u;T) = C_4^*\Lambda_M(C_4\dot{y}(T;u) - z_d), \\ \dot{p}(u;T) = A_2(T)C_4^*\Lambda_M(C_4\dot{y}(T;u) - z_d) \end{cases}$$

まず, ここでは初期値を正当化しなければならない. 即ち, C_4^*の値域は H, $A_2(T)$ の定義域は V_2である. 従って合成 $A_2C_4^*$は定義できない. この積が意味を持つためには次の (i) 又は (ii) の仮定があれば十分である.

(i) $A_2 \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(H, V'))$.

(ii) $C_4 \in \mathcal{L}(V_2', M)$.

しかし意味を持ったとしても, 上の随伴系が一意解を持たねば, 最適性を記述しても意味がない. 実際, 上の随伴系が一意解を許すためにはもっと強い条件, 例えば,

$$C_4 \in \mathcal{L}(V', M), \quad A_2 \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(V_2, H))$$

を仮定すると解の一意的存在証明を容易に与えることができる. しかし, これは応用上望ましくない条件である. そこで, Lions のアイデアより転換法 (transposition) を利用し, 随伴系の解の概念を拡張し, より自然な観測作用素のクラスに対し, 随伴系の解の一意的存在を示すことができる. これを次節でのべる.

4 転換法 (Method of transposition)

転換法より次の定理が得られる.

THEOREM 6 $p_0 \in H, p_1 \in V'$および $f \in L^1(T;V')$ を仮定する．この時弱い形の方程式

$$
\begin{cases}
\int_0^T \langle p, \ddot{\psi} + A_2(t)\dot{\psi} + A_1(t)\psi - df(t,y(u))\psi \rangle_{V_2,V_2'} dt \\
= \int_0^T \langle f, \psi \rangle_{V',V} dt + \langle p_1, \psi(T) \rangle_{V',V} - (p_0, \dot{\psi}(T))_H \\
\forall \psi \ \text{ satisfying} \\
\quad \begin{cases} \ddot{\psi} + A_2(t)\dot{\psi} + A_1(t)\psi - df(t,y(u))\psi \in L^2(0,T;V_2') \\ \psi(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = 0 \end{cases} \\
p_0 \in H, \quad p_1 \in V',
\end{cases}
$$

を満たす解 $y \in L^2(0,T;V_2)$ が一意に存在する．

上の方程式を形式的に解けば，

$$
\begin{cases}
\ddot{p} - \frac{d}{dt}(A_2(t)p) + A_1(t)p = df(t,y) + f \ \text{ in } \ (0,T), \\
p_0 = p(T), \quad p_1 = A_2(T)p_0 + \dot{p}(0)
\end{cases}
$$

が得られる．この転換されたシステムは与えられた観測に対し，随伴系としての役割を演じる．ここでは解の概念は弱くなっていることに注意しよう．しかしながら，今までの制限された観測作用素の条件は自然な仮定に戻る．即ち，

$$
\left.
\begin{array}{l}
C_1 \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V_2),M) \quad \Rightarrow C_1 \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V),M). \\
C_3 \in \mathcal{L}(H,M) \Rightarrow C_3 \in \mathcal{L}(V_2,M). \\
p(u;T) = C_4^* \Lambda_M (C_4 \dot{y}(T;u) - z_d(T)) \in H. \\
\dot{p}(u;T) = A_2(T)p(T;u) \in V_2'.
\end{array}
\right\}
$$

ここでは，ページ数の関係もあり，転換法による随伴系を用いた C_1, C_3に対する最適性の条件を書き下すことは略す．

5　応用

<u>例１：SINE-GORDON 方程式への応用</u>

Ωは十分に滑らかな境界 $\Gamma = \partial\Omega$をもつ R^n上の有界領域とする．$Q = (0,T) \times \Omega, \Sigma = (0,T) \times \Gamma$とおく．この時，SINE-GORDON 方程式は

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \beta \sin y = f \ \text{ in } \ Q, \\
y(u;t,x) = 0 \ \text{ on } \ \Sigma, \\
y(u;0,x) = y_0(x), \quad \dfrac{\partial}{\partial t}(u;0,x) = y_1(x) \ \text{ on } \ \Omega
\end{cases}
$$

により記述される．ここで, $\alpha > 0$, $\Delta\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}$ である．この方程式系においての次の制御問題を考える．

まず $V = H_0^1(\Omega), V_2 = H = L^2(\Omega)$ とおく．次の 2 つの bilinear form を導入する．

$$a_1(\phi, \varphi) = \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\varphi dx, \quad \forall \phi, \varphi \in V = H_0^1(\Omega).$$

$$a_2(\phi, \varphi) = \int_\Omega \alpha\phi\varphi dx, \quad \forall \phi, \varphi \in V_2 = L^2(\Omega).$$

ここで, $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)$ を表す．$\mathcal{U}_{ad} = M = L^2(\Omega)$ とおいて, $B = I$と $C = I$となる恒等作用素をとる．外力 fとして制御変数 vを考える．この時, SINE-GORDON 方程式系に対する次の最適制御問題が考えられる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y(v)}{\partial t^2} + \alpha\dfrac{\partial y(v)}{\partial t} - \Delta y(v) + \beta \sin y(v) = v \quad \text{in} \quad Q, \\ y(v; t, x) = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ y(u; 0, x) = y_0(x), \quad \dfrac{\partial y}{\partial t}(v; 0, x) = y_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

ここで, $v \in \mathcal{U}_{ad} = L^2(\mathcal{Q})$ である．上の制御系は定理 1により一意な解 $y(v)$ が存在する．この制御系に対するコスト関数は

$$J(v) = \int_0^T \int_\Omega (y(v; t, x) - z_d(t, x))^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega v^2(t, x) dxdt$$

で与えられるとする．ここで, $z_d \in L^2(Q)$. u をこのコスト $J(v)$ に対する最適制御とする．この時, 次の（随伴系）は定理 1より一意な解 $p(u)$ を持つ．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p(u)}{\partial t^2} - \alpha\dfrac{\partial p(u)}{\partial t} + (\Delta - \cos p(u))p(u) = y(u) - z_d \quad \text{in} \quad Q, \\ p(u; t, x) = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ p(u; T, x) = 0 \quad \text{in} \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(u; T, x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

求める最適制御 u は方程式系とコスト関数より導入される随伴系により $u = -p(u)$ で与えられる．

例 2 KLEIN-GORDON TYPE 方程式への応用

詳細は略すが, 次のタイプの方程式 (Eq.1)-(Eq.5) に対して適当な γの条件のもとで, 例 1 と同様に最適制御の存在と最適条件を随伴系を用いて記述することができる．

$$\text{(Eq.1)} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \Delta\left(b\Delta\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \Delta(a\Delta y) + |y|^\gamma y = f + Bv,$$

$$\text{(Eq.2)}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \nabla\cdot\left(b\nabla\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \Delta(a\Delta y) + |y|^\gamma y = f + Bv,$$

$$\text{(Eq.3)}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b\frac{\partial y}{\partial t} + \Delta(a\Delta y) + |y|^\gamma y = f + Bv,$$

$$\text{(Eq.4)}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \nabla\cdot\left(b\nabla\frac{\partial y}{\partial t}\right) - \nabla\cdot(a\nabla y) + |y|^\gamma y = f + Bv,$$

$$\text{(Eq.5)}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b\frac{\partial y}{\partial t} - \nabla\cdot(a\nabla y) + |y|^\gamma y = f + Bv.$$

詳しい結果の説明は Ha[3] にある.

参考文献

[1] H. T. Banks, K. Ito and Y. Wang, Well Posedness for damped second order systems with unbounded input operators, *Center for Research in Scientific Computation, North Carolina State university*, 1993.

[2] V. Barbu, Optimal control of variational inequalities, *Research Notes in Mathematics, Pitman Advanced Publishing Program*, Vol. 100, 1984.

[3] Junhong Ha, Quadratic optimal control problems for damped second order systems, *PhD-thesis, Kobe University, Japan.*

[4] Lasiecka and Triggiani, Differential and Algebraic Riccati Equations with Application to Boundary/ Point Control Problems: Continuous Theory and Approximation Theory, *Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag*, Vol. 164, 1991.

[5] J. L. Lions, Equations Differentielles · Operationnelles et problémes aux limits, *Springer-Verlag Berlin · Gotteningen · Heidelberg*, 1961.

[6] J. L. Lions, Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1971.